MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

VOIE GÉNÉRALE
ET TECHNOLOGIQUE

2DE | 1RE | TLE

Accompagnement personnalisé

Mathématiques

Reconnaître des figures usuelles et déterminer l'aire des surfaces associées

Domaine

Résoudre des problèmes de géométrie

Sous domaine

Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes

Compétences mathématiques

Chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer

Références au programme
Capacités
- Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes.
- Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.
- Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.
- Résoudre une équation du type $f(x) = k$ en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.

Objectifs

- Utiliser le théorème de Pythagore dans une situation contextualisée.
- Décomposer une tâche complexe en plusieurs tâches simples.
- Calculer des longueurs et l'aire d'une surface délimitée par un ensemble de figures usuelles.
- Exprimer une aire par une expression algébrique faisant intervenir une longueur inconnue.
- Travailler les (changements de) cadres et les registres.

Modalités

Durée : 2 séances de 55 minutes

Les séances sont en 4 temps :

- activité diagnostique : travail individuel puis correction sur la géométrie et les expressions algébriques. (Présentée en fin de document) ;
- activité principale : travail individuel puis en groupes, sur le calcul de l'aire ;
- activité principale : travail en groupes : expression de l'aire en fonction de la largeur de la bordure et calcul de la largeur solution du problème ;
- activité principale : reprise collective.

Selon ses objectifs et le temps qu'il souhaite y consacrer, l'enseignant pourra conduire le travail de façon continue ou répartir les différents temps dans des séances distinctes.

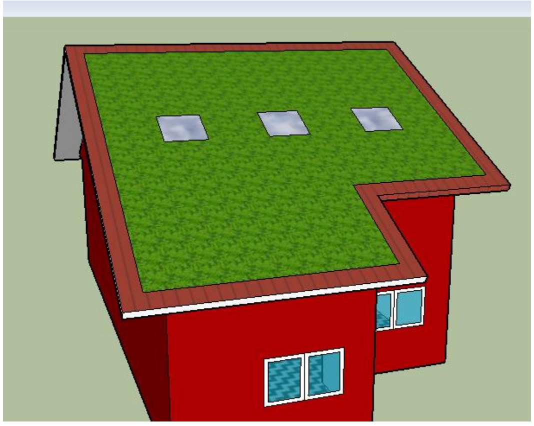
Énoncé de l'activité d'accompagnement personnalisé

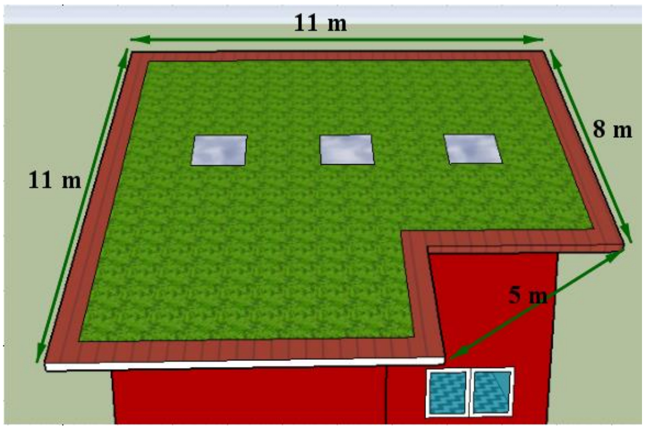
Activité principale

Dans le cadre d'un projet de construction, une famille envisage d'opter pour un pan de toiture végétalisée. Le projet comporte trois fenêtres de toit de dimensions 120 cm × 120 cm. Dans le schéma ci-dessous, les cotes sont exprimées en mètres.

On prévoit une bordure sans végétaux de 10 cm de large sur la totalité du contour de la toiture. Déterminer l'aire de la surface à couvrir par des végétaux.

La quantité de matériaux disponible pour réaliser la surface végétalisée permet de couvrir une surface de 90 m^2. **Comment modifier la largeur de la bordure pour limiter à 90 m^2 l'aire de la surface à couvrir par des végétaux ?**





Commentaires de l'activité

Analyse de l'activité principale

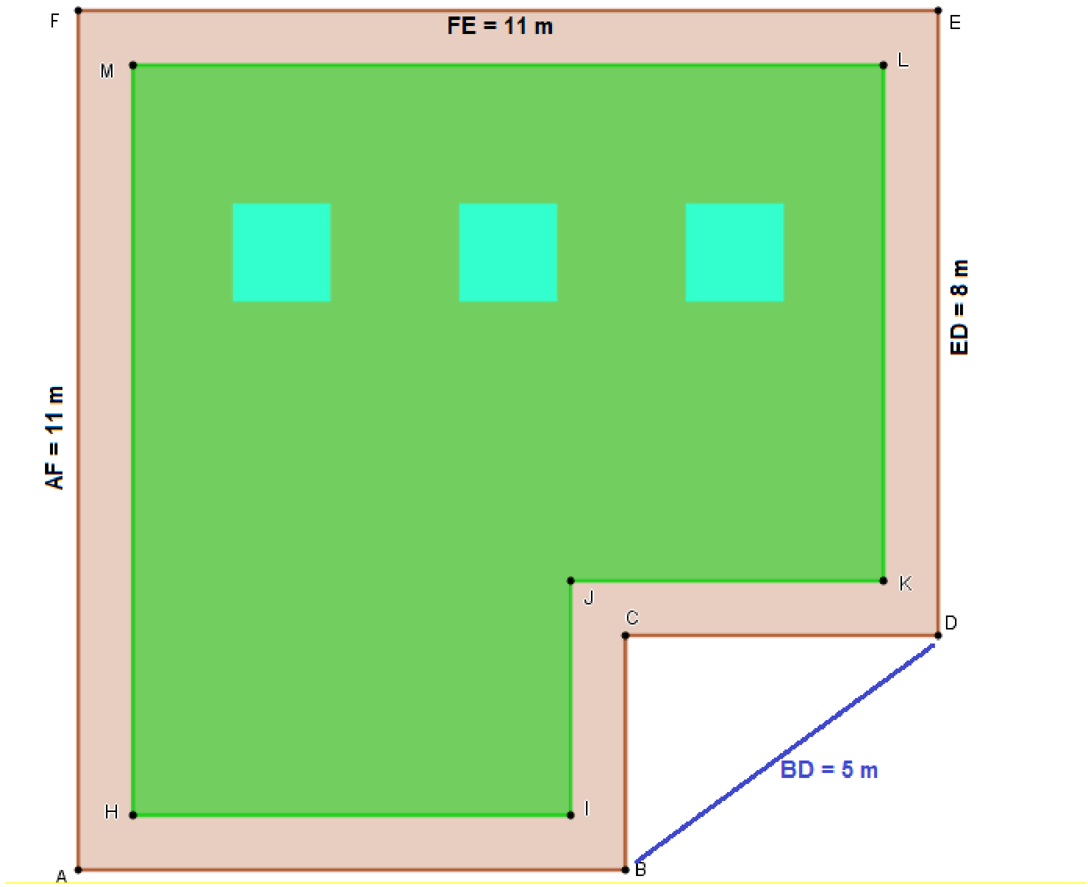
Procédures correctes pour résoudre la tâche

Toute démarche proposée par l'élève doit être prise en compte dans le scénario pédagogique, qu'elle soit erronée, incomplète ou aboutie :

- décomposition d'un problème en sous problèmes ;
- résolution de problème par calculs successifs ;
- représentation de la forme du pan de toiture à l'aide d'un outil de géométrie dynamique ;
- éventuellement une démarche mixant les deux procédures précédentes.

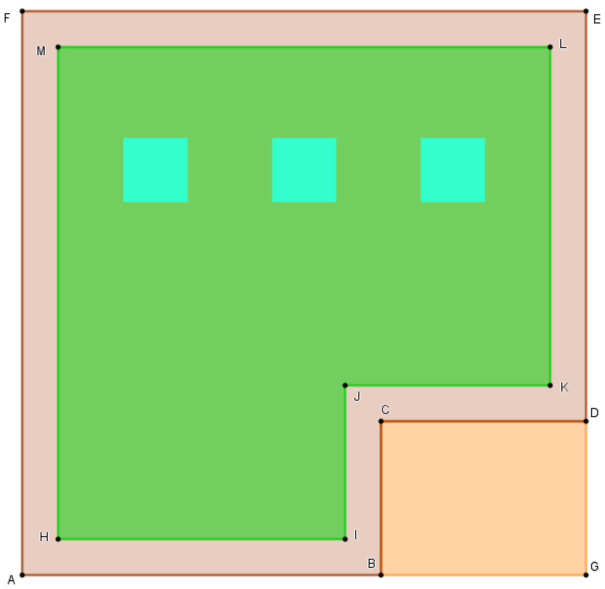
Les différentes étapes de ce protocole peuvent également être utilisées indépendamment, tout ou partie, et ainsi constituer des aides ponctuelles sous forme de jokers, QR code, etc.

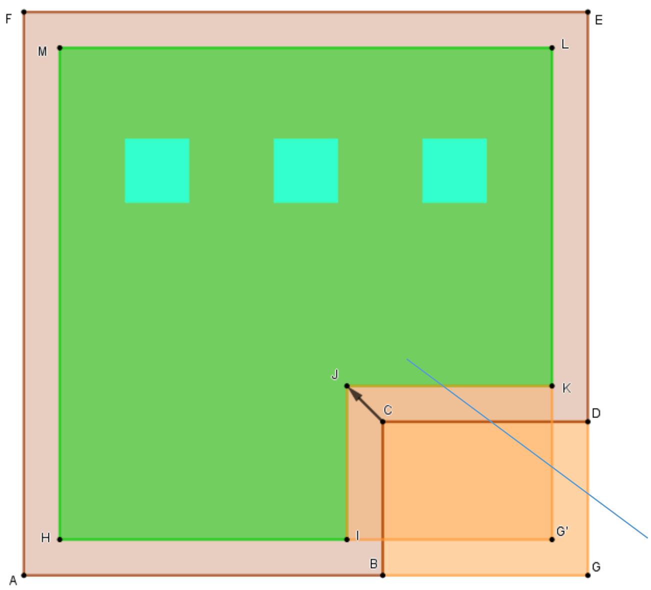
L'élève doit dans un premier temps s'approprier la situation et se représenter les figures constituant le pan de toit ABCDEF et la surface végétalisée HIJKLM en utilisant une vue de dessus, ou pour les plus avancés, directement sur la représentation en perspective.



Il doit ensuite déterminer l'aire de HIJKLM avec une bordure de 10 cm.
Pour cela, il peut :

- Déterminer les longueurs manquantes de ABCDEF, puis celles de HIJKLM et calculer l'aire de HIJKLM en la considérant comme juxtaposition de deux rectangles ou comme un carré auquel on soustrait un rectangle.





- Déterminer HM et calculer l'aire du carré $MLG'H$ en le considérant comme image du carré FEGA par une homothétie de centre O puis de rapport HM/AF. Il calcule ensuite l'aire de HIJKLM en la considérant comme juxtaposition de deux rectangles ou comme un carré auquel on a soustrait un rectangle.

Dans les deux cas, l'élève ne doit pas oublier d'ôter les aires des trois fenêtres.

Cette première partie de l'activité doit s'appuyer sur les échanges suite à l'activité diagnostique pour permettre aux élèves les moins avancés de déterminer l'aire de HIJKLM.

L'élève doit ensuite déterminer l'aire de HIJKLM avec une bordure de x cm et trouver x pour que cette aire soit égale à 90m².

L'expression de l'aire se détermine avec les mêmes procédures que pour $x = 10$. Le passage à l'algèbre peut s'avérer délicat : penser à utiliser le calcul littéral en géométrie ne va pas de soi pour une partie des élèves. Son utilisation dans une figure complexe peut aussi s'avérer être un obstacle à la détermination de l'expression de l'aire.

La résolution du problème peut ensuite se traiter :

- par essais-erreurs ;
- à l'aide d'un tableur ;
- à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice ;
- graphiquement en représentant la fonction qui à x associe l'aire de HIJKLM ;
- (par balayage) avec un script Python.

Une résolution algébrique est envisageable dans le cas où l'élève considère HIJKLM comme un carré de côté $11 - 2x$ dont on a soustrait un rectangle. Il aurait alors à résoudre une équation du type $(11 - 2x)^2 = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Le niveau de précision de la solution trouvée en fonction de la méthode sera sujet à une discussion féconde avec les élèves.

Quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quelles difficultés peuvent-ils rencontrer ?

Obstacle 1 : l'élève ne parvient pas à s'approprier la situation.

Obstacle 2 : l'élève ne parvient pas à mettre en place une stratégie de résolution.

Obstacle 3 : l'élève n'est pas en mesure de déterminer les longueurs manquantes du schéma.

Obstacle 4 : l'élève ne maîtrise pas les contenus disciplinaires nécessaires au traitement de la situation, notamment le calcul littéral.

Obstacle 5 : l'élève ne parvient pas à rendre compte de la démarche élaborée.

Remédiation

	Obstacle 1	Obstacle 2	Obstacle 3	Obstacle 4	Obstacle 5
Différenciation des contenus	Proposer un questionnement détaillé Simplifier l'énoncé *	Proposer des supports avec décomposition de la démarche			
Différenciation des processus	Proposer des supports de différents types (pour favoriser l'appropriation d'informations et d'habilités) : aide-mémoire, liste de vérification corrective, grille d'attendus, jokers, coups de pouce, QRcode, capsules vidéo, notice technique d'utilisation des TIC, etc.				
Différenciation des productions					Laisser le libre choix à l'élève du mode de restitution
Différenciation des outils		Proposer un protocole de résolution		Permettre l'accès à différentes ressources	Proposer un outil de présentation (carte mentale, diaporama, etc.)

(*) en gardant les objectifs liés au contexte proposé

Déroulé

Les activités ont été pensées pour 2 séances de 55 minutes tout en offrant une souplesse à l'enseignant en fonction de ses objectifs, de sa progression et du temps qu'il souhaite y consacrer : l'activité diagnostique peut être faite complétement ou partiellement, au moment de la séance ou en amont ; l'activité principale peut être menée sur une seule séance de 55 minutes et la reprise ou la correction à la séance suivante etc…

Séance 1

- Activité diagnostique (10 à 20 min)
  Les élèves répondent aux QCM individuellement. Une correction collective permet ensuite de travailler sur les erreurs attendues et prépare l'activité principale.
- Activité principale (35 à 45 min) :

Après une phase d'appropriation individuelle (10 min), les élèves travaillent en groupes pendant 25 à 35 min. L'objectif est de permettre aux élèves d'élaborer une stratégie générale pour répondre au problème (cf supra) et de déterminer un découpage de la surface et un calcul qui permet d'obtenir l'aire de la partie à végétaliser.
On pourra éventuellement leur fournir l'un des schémas proposés dans la partie remédiation.

Séance 2

- Activité principale (20 à 25 min) :
- Reprise collective (25 à 30 min) :

  Plusieurs formats de reprise sont envisageables :
  - Cours dialogué sur les différentes solutions et stratégies trouvées.
  - Présentation par groupe avec utilisation d'affiches.
  - Présentation orale des travaux de certains élèves.

  Au-delà de la proposition d'une solution du problème, il est intéressant de montrer la diversité des stratégies employées pour résoudre le problème proposé.

Pistes de différenciation

Suivant les difficultés rencontrées par les groupes dans l'activité diagnostique et dans l'activité principale, on pourra mettre à disposition les aides ou les indices suivants :

- une vue de dessus à compléter, avec ou sans longueurs reportées du texte, pour une bordure de 10 cm ;
- l'ordre des longueurs à déterminer ;
- l'idée de l'homothétie liant les deux carrés ;
- l'idée du calcul littéral
- une vue de dessus à compléter, avec ou sans longueurs reportées du texte, pour une bordure de x cm ;
- une méthode de résolution de l'équation.

Pour les groupes les plus rapides, suivant la méthode qu'ils ont utilisée, on pourra proposer de :

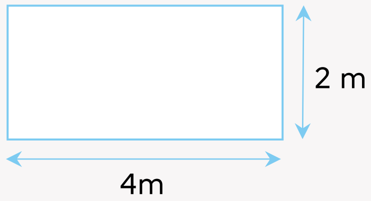
- retrouver l'aire de HIJKLM en utilisant la méthode par décomposition des aires ou par homothétie ;
- trouver une autre méthode de résolution de l'équation en faisant varier la précision attendue de la solution
- montrer que l'équation à résoudre est équivalente à $(11 - x)^2 = k, \text{où } k \in \mathbb{R}$;
- proposer un script Python à modifier ou à compléter pour déterminer une valeur approchée de la solution.

Activité diagnostique sur la géométrie et les expressions algébriques

Énoncé

Pour chacune des questions suivantes, cocher la ou les bonnes réponses.

1. Quelle est l'aire du rectangle ?

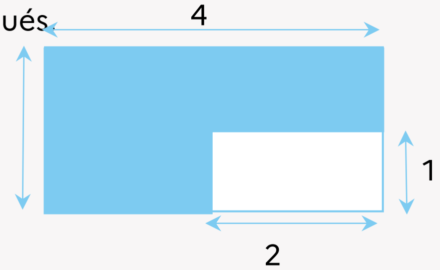


□ 6 m²   □ 12 m²

□ 8 m²   □ Autre réponse

2. La figure ci-contre est constituée de deux rectangles imbriqués.

Quelle est l'aire de la surface colorée en bleu ?

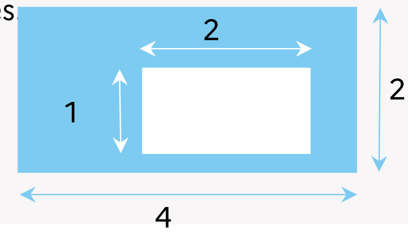


□ 4 m²   □ 8 m²

□ 6 m²   □ Autre réponse

3. La figure ci-contre est constituée de deux rectangles imbriqués.

Quelle est l'aire de la surface colorée en bleu ?



□ 4 m²   □ 8 m²

□ 6 m²   □ Autre réponse

4. Les dimensions d'un rectangle sont agrandies de 3 fois. **Son aire est alors agrandie de :**

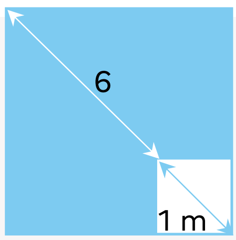
□ 3 fois   □ 6 fois   □ 9 fois   □ 12 fois

5. Un rectangle est réduit : il voit son aire passer de 100 cm² à 25 cm². **Le coefficient de réduction est**

□ 1/4   □ 1/2   □ 2   □ 4

6. La figure ci-contre est constituée de deux carrés imbriqués.

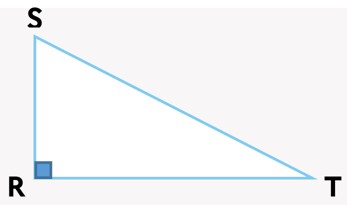
Par combien multiplie-t-on l'aire du carré blanc pour obtenir l'aire du carré bleu



□ 6   □ 36

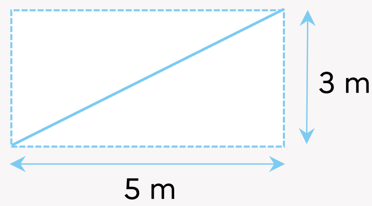
□ 7   □ 49

7. Quelle égalité relative au triangle RST ci-contre est-elle correcte ?



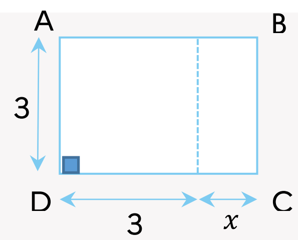
- ☐ RS + RT = ST
- ☐ $RS^2 = RT^2 + ST^2$
- ☐ ST = RS × RT
- ☐ $RS^2 + RT^2 = ST^2$

8. Quelle est la longueur, en m, de la diagonale de ce rectangle ?



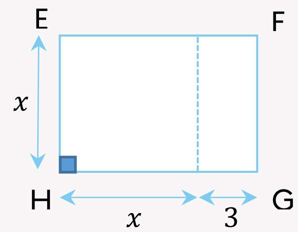
- ☐ 8
- ☐ $\sqrt{8}$
- ☐ $\sqrt{34}$
- ☐ Autre réponse

9. Quelle est l'aire du rectangle ABCD ?



- ☐ $9 + 3x$
- ☐ $9x$
- ☐ $3(3 + x)$
- ☐ $9 + x$

10. Quelle est l'aire du rectangle EFGH ?



- ☐ $x(x + 3)$
- ☐ $3x^2$
- ☐ $x^2 + 3x$
- ☐ $x^2 + 3$

11. Les côtés d'un rectangle sont $(\boldsymbol{2 + x})$ et $(\boldsymbol{4 - x})$, $\boldsymbol{x}$ étant un nombre réel compris entre 0 et 4.
Quelle est l'aire du rectangle ?

- ☐ **6**
- ☐ $\boldsymbol{-x^2 + 2x + 8}$
- ☐ $\boldsymbol{x^2 + 6x + 8}$
- ☐ $\boldsymbol{8 - x^2}$

Analyse de l'activité diagnostique

Question flash	Descriptif	Analyse des distracteurs selon les propositions de réponse
1	Mener un calcul mental (abordable) impliquant l'aire d'un rectangle	**6 m²** : l'élève additionne les deux mesures présentes sur le schéma **12 m²** : l'élève calcule le périmètre du rectangle et non l'aire de sa surface

2	Mener un calcul d'aire dans le cas d'une combinaison de figures usuelles	**4 m²** : l'élève calcule le produit de la largeur de la surface colorée par la longueur de la surface blanche **8 m²** : l'élève ne calcule pas la différence entre l'aire de la surface du rectangle blanc et l'aire de la surface totale
3	Mener un calcul d'aire dans le cas d'une combinaison de figures usuelles	**4 m²** : l'élève calcule le produit de la largeur de la surface colorée par la longueur de la surface blanche **8 m²** : l'élève ne calcule pas la différence entre l'aire de la surface du rectangle blanc et l'aire de la surface totale
4	Déterminer un coefficient d'agrandissement	**3 fois** : confusion coefficient agrandissement longueur/aire **6 fois** : confusion coefficient agrandissement longueur/aire. Double avec idée du périmètre **12 fois** : « les 4 côtés du rectangle sont 3 fois plus grands, la figure sera 12 fois plus grande »
5	Déterminer un coefficient d'agrandissement	**0,25 ou 1/4** : confusion coefficient agrandissement longueur/aire **2** : confusion coefficient agrandissement longueur/aire et inversion du coefficient (ou de la transformation) **4** : inversion du coefficient (ou de la transformation)
6	Calculer l'aire d'un agrandissement	**6** : l'élève ne détermine pas correctement le coefficient d'agrandissement, puis multiplie l'aire par ce coefficient et non par son carré. **7** : l'élève multiplie l'aire par le coefficient d'agrandissement et non par son carré. **36** : l'élève ne détermine pas correctement le coefficient d'agrandissement, mais multiplie bien l'aire par son carré.

7	Appliquer le théorème de Pythagore dans une situation donnée	**RS + RT = ST** : correspond à la somme des données numériques du schéma et non à l'énoncé du théorème de Pythagore $RS^2 = RT^2 + ST^2$: l'élève n'applique pas correctement le théorème de Pythagore dans le triangle RST **ST = RS** × **RT :** l'élève utilise la longueur des trois côtés du triangle et effectue un calcul sans cohérence
8	Utiliser le théorème de Pythagore pour déterminer la diagonale d'un rectangle	$\mathbf{8}$: l'élève calcule la somme de la longueur et de la largeur du rectangle $\sqrt{\mathbf{8}}$: l'élève applique de façon erronée le théorème de Pythagore en oubliant d'élever au carré la longueur des côtés
9	Exprimer l'aire d'un rectangle en fonction d'une longueur inconnue, développer et réduire une expression algébrique.	$\boldsymbol{9x}$: l'élève multiplie les trois longueurs $\boldsymbol{9+x}$: l'élève n'utilise que les longueurs indiquées sur le schéma et ne multiplie par la hauteur pour calculer l'aire du deuxième rectangle.
10	Exprimer l'aire d'un rectangle en fonction d'une longueur inconnue, développer et réduire une expression algébrique.	$\boldsymbol{3x^2}$: l'élève multiplie les trois longueurs $\boldsymbol{x^2+3}$ **:** l'élève n'utilise que les longueurs indiquées sur le schéma et ne multiplie pas par la hauteur pour calculer l'aire du deuxième rectangle.
11	Exprimer l'aire d'un rectangle, développer et réduire une expression algébrique en utilisant la double distributivité.	$\mathbf{6}$: l'élève ajoute les longueurs au lieu de les multiplier $\boldsymbol{x^2+6x+8}$: l'élève commet des erreurs de signe dans le développement $\boldsymbol{8-x^2}$: l'élève oublie les termes croisés dans la double distributivité

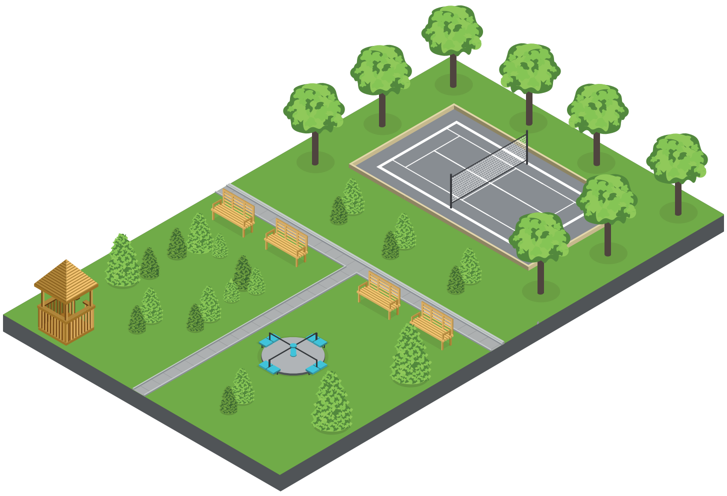
Pistes de prolongements

Activité de réinvestissement

Cette séance a pour objectif de consolider et d'approfondir les capacités et connaissances mathématiques travaillées au cycle 4 afin de pouvoir envisager un réinvestissement dans des configurations géométriques du plan plus complexes, mais également dans l'espace (étude de solides usuels, calcul de volume, etc.) conformément au programme de seconde générale et technologique.

Problème 1

Dans le cadre d'un projet de rénovation urbaine, une mairie envisage de créer un espace de jeux sur une parcelle rectangulaire de dimensions : l = 24 m et L = 80 m.



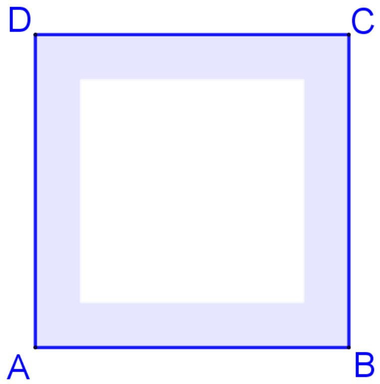
L'aire de jeux sera constituée :

- d'un terrain rectangulaire de « Touchtennis » (largeur : 6 m et longueur : 12 m);
- d'un tourniquet (de 5 m diamètre);
- d'une cabane en bois de base carrée (de 4 m de côté);
- d'un chemin d'accès de largeur 180 cm (figure ci-contre).

Déterminer la longueur du chemin pour que la surface de pelouse nécessaire pour cet espace soit égale à 73 % de la parcelle.

Problème 2

On dispose d'un carré ABCD de côté 5 cm. On souhaite construire à l'intérieur un carré à égale distance des côtés de ABCD et d'aire la moitié de l'aire de ABCD.



Quel doit être la longueur du côté du nouveau carré ?

Problème 3

Variante avec un disque.
Variante avec généralisation avec un carré de côté a ou un disque de rayon a.

Activité de prolongement

On souhaite que l'appel « bordure (90) » renvoie une valeur approchée à 1 mm près de la largeur de la bordure nécessaire pour que l'aire de la surface à végétaliser soit 90 m^2.

Compléter les deux fonctions Python suivantes.

```
def calc_aire (largeur) :
    aire =
    return aire

def bordure (objectif) :
    largeur = 0
    aire = calc_aire (largeur)
    while              :
        largeur =
        aire =
    return largeur
```