MESURE DU MÉRIDIEN TERRESTRE : LE CERCLE RÉPÉTITEUR DE DELAMBRE ET MÉCHAIN

Un modèle pédagogique de cercle répétiteur sert à mesurer des angles sur la carte originale éditée par Delambre et Méchain. Après avoir mesuré les angles aigus avec 3 chiffres significatifs, les élèves calculent la longueur d'une portion de méridien et retrouvent la définition historique du mètre étalon.

Ce document complète le document « La forme de la Terre et les mesures à la surface de la Terre » disponible sur la page éduscol dédiée à l'enseignement scientifique.

Mots-clés

Triangulation ; méridien terrestre ; cercle répétiteur ; précision ; Delambre ; Méchain.

Références au programme

Savoirs

Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien (environ 40 000 km) à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthode dite d'Ératosthène, méthode de triangulation.

Savoir-faire

Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain.

Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien.

Catégorie de ressource

Texte historique ; mesures historiques de Delambre et Méchain. Guide de fabrication d'un matériel de mesure.

Documents

Document 1 : modèle pédagogique de cercle répétiteur simplifié

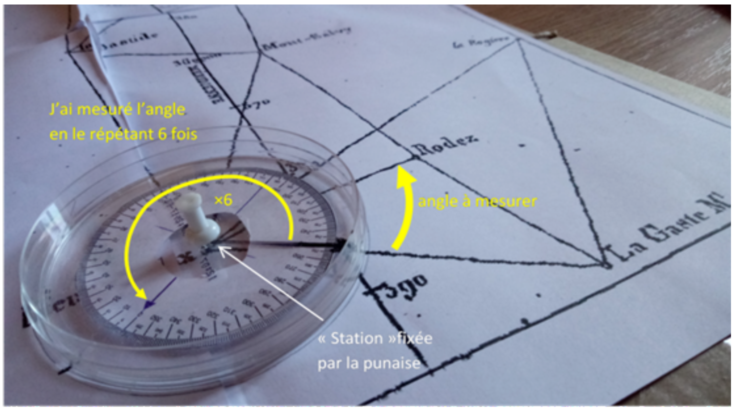


Figure 1 : ce modèle pédagogique de cercle répétiteur illustre la mesure par répétition d'un angle tracé sur une feuille. La punaise doit être enfoncée sur une planche de bois tendre.

Deux vidéos illustrent :

- le principe de fonctionnement du cercle répétiteur ;
- la fabrication au laboratoire d'un cercle répétiteur simplifié.

Document 2 : mesures d'angles au XVIIIe siècle

Les données de mesure de l'expédition de la méridienne entre Dunkerque et Barcelone (1792 – 1798) sont rassemblées dans un ouvrage consultable sur le site gallica de la BNF : Base du système métrique décimal, exécutée en 1792 et années suivantes, par M. Méchain et Delambre, rédigée par M. Delambre, 1806-1810.

L'exemple ci-dessous concerne le triangle Rieupeyroux – Rodez – Lagast, que l'on trouve à la fois sur la carte originale et dans le registre des mesures faites à la station de Rieupeyroux. La carte originale peut être imprimée en format agrandi pour faire apparaitre le triangle étudié.

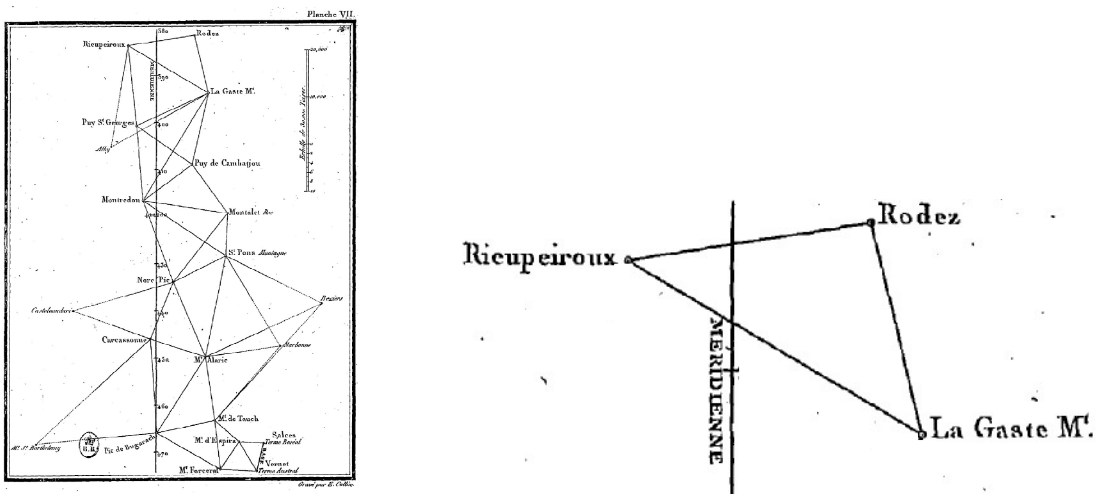
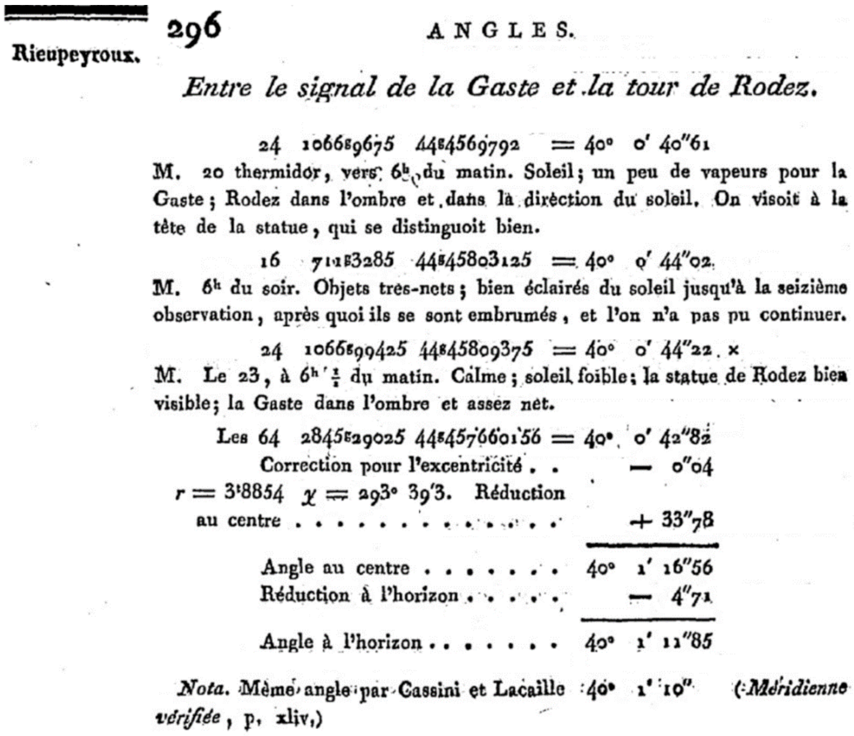


Figure 2 : carte originale et détail du triangle étudié
Source : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110604s/f741.item


Rieupeyroux. 296 ANGLES.

Entre le signal de la Gaste et la tour de Rodez.

24 1066g9675 44g4569792 = 40° 0′ 40″61
M. 20 thermidor, vers 6h du matin. Soleil ; un peu de vapeurs pour la Gaste ; Rodez dans l'ombre et dans la direction du soleil. On visoit à la tête de la statue, qui se distinguoit bien.

16 711g3285 44g45803125 = 40° 0′ 44″02
M. 6h du soir. Objets très-nets ; bien éclairés du soleil jusqu'à la seizième observation, après quoi ils se sont embrumés, et l'on n'a pas pu continuer.

24 1066g99425 44g45809375 = 40° 0′ 44″22. ×
M. Le 23, à 6h ½ du matin. Calme ; soleil foible ; la statue de Rodez bien visible ; la Gaste dans l'ombre et assez net.

Les 64 2845g29025 44g4576601'56 = 40° 0′ 42″82
Correction pour l'excentricité . . — 0″04
r = 3t8854 χ = 293° 39′3. Réduction au centre . . . . + 33″78

Angle au centre . . . . 40° 1′ 16″56
Réduction à l'horizon . . . . . . — 4″71

Angle à l'horizon . . . . 40° 1′ 11″85

Nota. Même angle par Cassini et Lacaille 40° 1′ 10″ (*Méridienne vérifiée*, p. xliv.)

Figure 3 : registre des mesures faites à la station de Rieupeyroux
Source : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110604s/f480.image

Pistes d'exploitation pédagogique

Analyse d'un carnet de laboratoire

Le document 2 est un exemple de communication scientifique qui en illustre plusieurs caractéristiques. On y met en évidence :

- l'importance de la description précise des conditions dans lesquelles les mesures ont été réalisées, afin que d'autres puissent éventuellement les reproduire ;
- le relevé détaillé des résultats de mesures, les calculs associés et leur justification : conversions entre unités (grade -> degré), corrections apportées (excentricité, centre, etc.) ;
- la comparaison avec des résultats déjà publiés.

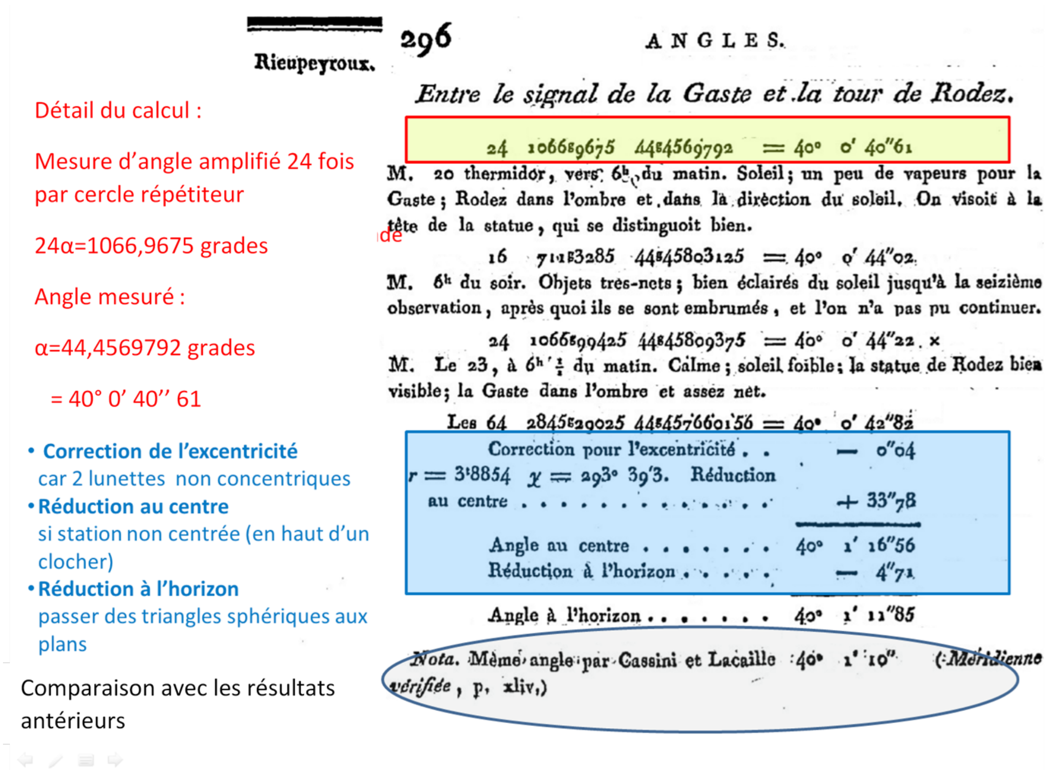


Figure 4 : exemple commenté d'une page extraite du document 2. Pour aller plus loin, se reporter au document original, notamment la partie Discours préliminaire et Observations géodésiques de la tour de Dunkerque.

Analyse de la précision des mesures

Les résultats présentés dans le document présentent une précision remarquable.
Cette précision peut être quantifiée en admettant que Delambre et Méchain donnent leurs résultats avec un nombre de chiffres significatifs adapté à la précision. En d'autres termes, lorsque la valeur 40°1'11,85'' est donnée, le résultat vrai se situe en fait entre 40°1'11,845'' et 40°1'11,855''. Ce qui correspond à une incertitude relative de l'ordre de 0,01 / 3600 / 40 (0,01 '' sur 40°) soit environ 7×10^{-8}.

On peut demander aux élèves d'écrire la valeur de cet angle sous forme décimale avec un nombre de chiffres significatifs adaptés (notions étudiées en seconde dans le programme de physique-chimie) soit 40,019958 degrés avec une incertitude de l'ordre de 2×10^{-6} degrés.

Le cercle répétiteur, pour améliorer la précision des angles mesurés

Les mesures d'angle par Delambre et Méchain ont été réalisées avec le cercle répétiteur de Borda : il a permis d'améliorer la précision des mesures précédemment effectuées avec un « quart de cercle ».

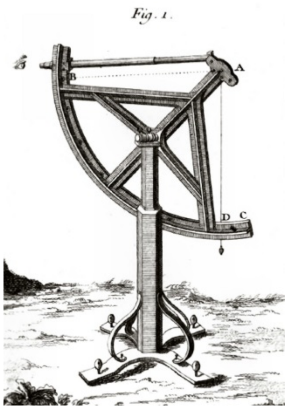


Figure 5 : le quart de cercle de Picard (1671) possède une seule lunette astronomique.
Source : [wikipedia]

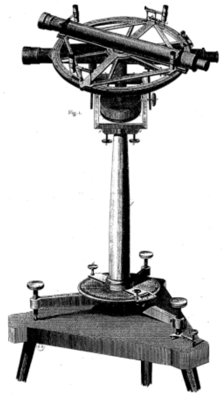
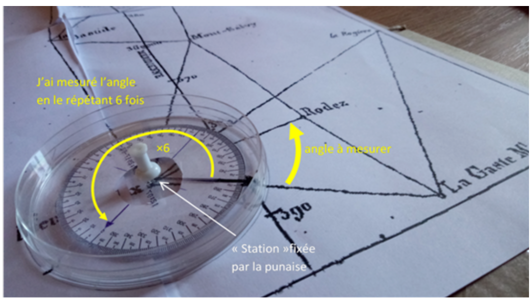


Figure 6 : le cercle répétiteur de Borda (1790) possède deux lunettes astronomiques verrouillables.
Source : [wikipedia]

Le cercle répétiteur simplifié décrit dans le document 1 peut servir à illustrer la différence de fonctionnement entre ces deux instruments, différence qui se manifeste au niveau des résultats obtenus. Mesurons par exemple l'angle au sommet de Rieupeyroux avec chacun de ces deux instruments :

L'élément inférieur du cercle répétiteur est un simple cercle gradué au degré. Il permet de mesurer l'angle à 40°.

En utilisant la méthode du cercle répétiteur (décrite dans la vidéo du document 1), on obtient une valeur de 40,1° comportant 3 chiffres significatifs.



Retrouvez éduscol sur

Les sources d'erreurs de mesure avec le cercle répétiteur simplifié sont nombreuses. L'axe de rotation doit être parfaitement centré et dépourvu de jeu. On peut atteindre une incertitude inférieure à 0,5° en se rapprochant des conditions de répétabilité et de reproductibilité suivantes :

- faire le zéro (vérifier que les flèches des éléments inférieur et supérieur sont superposées sur les côtés du triangle **puis** enfoncer la punaise sur une plaque de bois tendre) ;
- limiter le glissement entre les deux éléments en augmentant les frottements par la pâte à modeler et en déplaçant lentement l'élément inférieur ;
- affiner les traits du triangle à mesurer (c'est la limite du document historique agrandi) ;
- diminuer l'effet de la parallaxe en plaçant son œil à la verticale de la graduation.

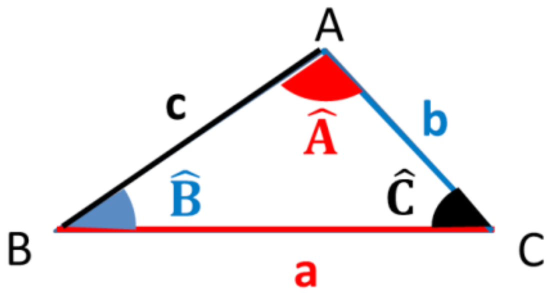
Réalisation effective d'un calcul de triangulation

Delambre et Méchain ne sont pas les premiers à utiliser la méthode de triangulation. Leur rôle est d'affiner les mesures effectuées par leurs prédécesseurs (l'abbé Picard, Cassini et Lacaille) afin de répondre à une commande historique : mesurer le plus précisément possible la longueur de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone (environ 9,5°) afin d'établir la « base du système métrique décimal », définissant le mètre comme la 10 000 000^{e} partie du quart du méridien terrestre.

Les élèves peuvent reproduire une partie de la démarche de triangulation de Delambre et Méchain.

À l'aide du cercle répétiteur simplifié, ils mesurent sur la carte imprimée les trois angles du triangle Rieupeyroux – Rodez – La Gase.

Connaissant la longueur d'un côté du triangle (donné par le professeur), ils déterminent la longueur des deux autres côtés grâce à loi des sinus : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$.



Résultats obtenus à partir de la carte imprimée au format A2 :

Rieuperoux – Lagast - Rodez : 45,2°	Rieuperoux – Rodez (donné) : 27,47 km
Lagast - Rieuperoux – Rodez : 40,1°	Rodez - Lagast : 24,94 km
Rieuperoux – Rodez - Lagast : 96,2°	Lagast – Rieuperoux : 38,52 km

Les élèves comparent ensuite leurs résultats avec des mesures effectuées sur Géoportail.

Géoportail est un outil idéal pour partager une carte annotée. Son intérêt réside dans la possibilité de superposer plusieurs cartes et d'utiliser des outils de mesures adaptés pour la géodésie. La carte partagée ci-dessous permet de visualiser une couche IGN, une couche de photographies aériennes et une couche croquis décrivant les stations Rieupeyroux – Rodez – Lagast et le méridien de Paris.

Carte geoportail partagée

Carte pointant les clochers pour Rieupeyroux et Rodez, ombre au sol de la pyramide du Lagast.

Résultats des mesures de distance sur la carte géoportail

Rieuperoux – Rodez : 27,47 km
Rodez – Lagast : 24,9 km.
Rieupeyroux – Lagast : 37,7 km

Remarques

- Un exercice différencié est envisageable suivant la spécialité des élèves en demandant d'effectuer le même type de travail sur un nombre de triangles différents.
- La position des stations étudiées est facilement repérable sur les photographies aériennes de géoportail : clochers pour Rieupeyroux et Rodez, ombre au sol de la pyramide du Lagast.
- La somme des angles dans le triangle devrait être de 180°. Il faut s'attendre à des erreurs importantes pour des élèves peu habiles avec le cercle répétiteur simplifié.

Détermination de la longueur du méridien terrestre

Cette activité peut se conclure en déterminant la longueur du méridien terrestre. Des calculs trigonométriques nécessitant des données supplémentaires (issues des azimuts) seraient nécessaires pour trouver la longueur de la portion du méridien à partir des mesures précédentes.

On propose de simplifier l'étude en mesurant directement sur la carte géoportail annotée précédente une portion du méridien entre deux points de latitude connus.

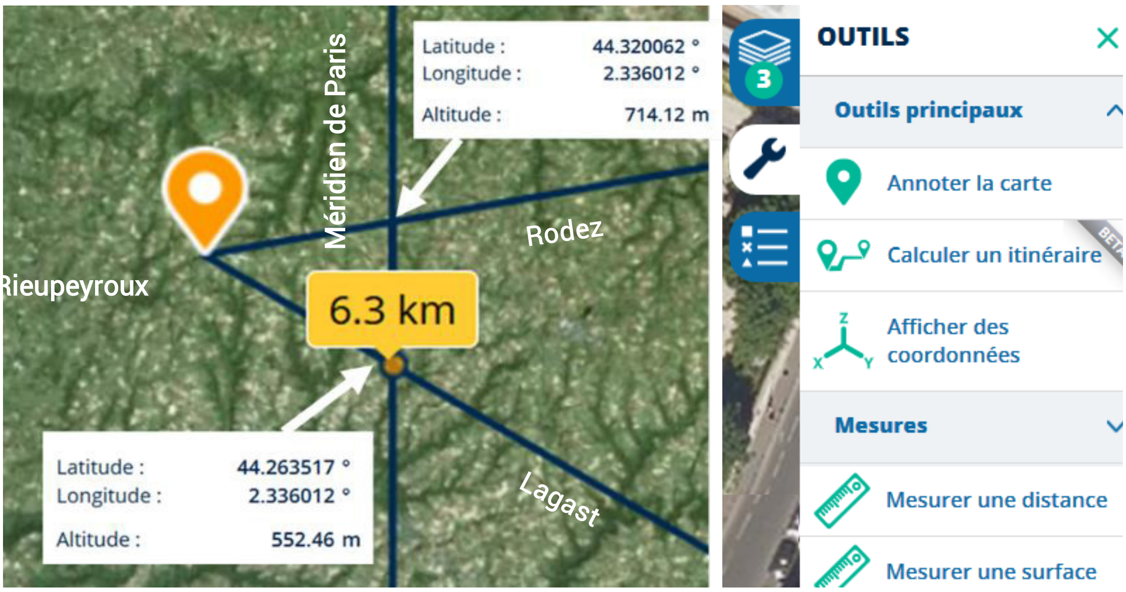


Figure 7 : copie d'écran de la carte partagée sur géoportail, où le méridien de Paris croise le triangle étudié, à proximité de Rieupeyroux. Les mesures de cette image ont été faites à partir du menu Outils de géoportail :

- Outils principaux > Afficher les coordonnées donne accès à la latitude de la position pointée sur la carte
- Mesures > Mesurer une distance donne accès en 2 clics à la distance

Les élèves peuvent déduire de ces résultats de mesure la longueur totale du méridien terrestre et vérifier qu'ils sont pertinents.

Mesures de l'arc du méridien croisant le triangle Rieupeyroux – Rodez – Lagast sur géoportail

6,3 km pour un angle de 0,0056545° (entre les latitudes 44,320062° et 44,263517°)

On en déduit que le quart du méridien vaut 90 × 6,3 / 0,0056545 = 10 027 km

Validation d'après les données actuelles

- D'après la définition historique, le mètre est la dix millionième partie du quart de méridien : Au lieu de trouver 10 000 000 m, on trouve 10 027 411 m. Soit un écart relatif de 0,3 %.
- Ce quart de méridien (πR/2) permet de retrouver une valeur proche du rayon de la Terre R = 10,027.106 *2/π = 6,3834.106 m proche des 6 371 km admis pour le rayon moyen de la Terre (écart 0,2 %).